

Note sul passaggio da \mathbb{R} a \mathbb{R}^n

A. Brillì¹

Questi appunti sono la sintesi del materiale utilizzato per il corso di Programmazione Matematica per la triennale in Ingegneria Informatica²

¹Dip. Ingegneria Informatica Automatica e Gestionale, "Sapienza" Univ. di Roma

²Acknowledgement: il materiale è stato sviluppato rivisitando gli appunti delle lezioni del Prof. Liuzzi.

Richiami su \mathbb{R}

- **Intorno sferico aperto** di $x_0 \in \mathbb{R}$

$$B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \rho\}, \quad \rho > 0$$

$$B(x_0, \rho) = (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \text{ (intervallo aperto centrato su } x_0)$$

$$B(3, 2) = ?$$

- **Intorno aperto** di $x_0 \in \mathbb{R}$

$$I(x_0) = (a, b)$$

qualunque intervallo aperto che contenga $B(x_0, \rho)$ per qualche $\rho > 0$.

Un intorno aperto di 3?

Punti di accumulazione su \mathbb{R}

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme di \mathbb{R}

- $y \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A quando

$$(B(y, \rho) \cap A) \setminus \{y\} \neq \emptyset, \quad \forall \rho > 0$$

$$A = (1, 7]$$

quale/i di questi punti sono di accumulazione per A ?

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 3, \quad y = 7$$

quale/i punti di accumulazione per A appartengono ad A ?

Derivato e punti isolati

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- **Derivato** di A ,

$$\mathcal{D}A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ di accumulazione per } A\}$$

- $x \in A$ è **isolato** di A quando

$$x \in A \setminus \mathcal{D}A$$

- $x \in A$ è **non isolato** di A quando

$$x \in A \cap \mathcal{D}A$$

$$A = (1, 7] \quad \mathcal{D}A?$$

$$A = (1, 7] \cup \{0\} \quad \mathcal{D}A?$$

$$A = [1, 7] \cup \{0\} \quad \mathcal{D}A?$$

\mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n \triangleq \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

- \mathbb{R}^n è prodotto cartesiano di insiemi **totalmente ordinati** (\mathbb{R})
- \mathbb{R}^n è **ordinato**, cioè è possibile definire su \mathbb{R}^n una relazione di ordine (riflessiva, antisimmetrica, transitiva). **Quale?**
- \mathbb{R}^n è totalmente ordinato?

Funzioni su \mathbb{R}^n

Definizione (A valori reali)

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una legge che assegna un valore $f(x) \in \mathbb{R}$ ad un elemento $x \in \mathbb{R}^n$.

Definizione (da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m)

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una mappa che assegna un elemento $f(x) \in \mathbb{R}^m$ ad un elemento $x \in \mathbb{R}^n$.

Operazioni su \mathbb{R}^n

- prodotto tra vettori ? dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$
 - 1 **prodotto di Hadamard** restituisce un vettore
 - 2 **prodotto interno o scalare** restituisce un numero

Prodotto di Hadamard

$$x \circ y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$$

Valgono le seguenti proprietà:

- 1 proprietà *commutativa*: dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \circ y = y \circ x$;
- 2 proprietà *associativa*: dati $x, y, v \in \mathbb{R}^n$, $x \circ (y \circ v) = (x \circ y) \circ v = x \circ (y \circ v)$;
- 3 proprietà *distributiva* rispetto alla somma: dati $x, y, v \in \mathbb{R}^n$, $x \circ (y + v) = (x \circ y) + (x \circ v)$;
- 4 proprietà di *omogeneità*: dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x \circ y) = (\alpha x) \circ y$;
- 5 proprietà di *esistenza del neutro*: il vettore $\mathbf{1} = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ volte}}$ è tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{1} \circ x = x \circ \mathbf{1} = x$$

- 6 proprietà di *esistenza del nullo*: l'origine di \mathbb{R}^n è tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{0} \circ x = x \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Prodotto scalare (o interno)

$$\langle x, y \rangle = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

gode delle proprietà

- 1 proprietà *commutativa*: dati $x, y \in \mathbb{R}^n$: $x^T y = y^T x$;
- 2 proprietà *distributiva* rispetto alla somma: se $x, y, v \in \mathbb{R}^n$: $x^T (y + v) = (x^T y) + (x^T v)$
- 3 proprietà di *omogeneità*: dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x^T y) = (\alpha x)^T y$;
- 4 proprietà di *esistenza del nullo*: l'origine di \mathbb{R}^n è tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{0}^T x = x^T \mathbf{0} = 0.$$

- 5 inoltre:

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}.$$

Spazio vettoriale \mathbb{R}^n

Sia \mathbb{R}^n l'insieme delle n -uple reali o vettori di n componenti reali

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ sarà per noi **sempre** un **vettore colonna** con n componenti

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o alternativamente

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Distanze in \mathbb{R}

Sulla retta dei reali, dato $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \equiv \text{distanza di } x \text{ dall'origine}$$

La funzione $|x|$ soddisfa le seguenti

- i) $|x| \geq 0$, cioè il valore assoluto di un qualunque numero reale è un numero positivo, tutt'al più nullo;
- ii) $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$, cioè l'origine ha valore assoluto nullo e l'unico reale il cui valore assoluto è nullo è l'origine;
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, cioè il valore assoluto della somma di due numeri è sempre minore, tutt'al più uguale, alla somma dei loro valori assoluti;
- iv) $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$, cioè il valore assoluto del prodotto tra due reali è uguale al prodotto dei valori assoluti.

Distanze in \mathbb{R}^2

Nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 , dato $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\|(x, y)\| \triangleq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sono verificate le proprietà del $|\cdot|$?

- i) $\|(x, y)\| \geq 0$?
- ii) $\|(x, y)\| = 0$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$?
- iii) $\|(x, y) + (v, w)\| \leq \|(x, y)\| + \|(v, w)\|$?
- iv) $\|\alpha(x, y)\| = |\alpha| \cdot \|(x, y)\|$?

Norma in \mathbb{R}^n

Definizione (Norma)

Una “norma” su \mathbb{R}^n è una funzione che associa ad ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ il numero $\|x\|$ che gode delle prop.

- i) $\|x\| \geq 0$;
- ii) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- iv) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Per esempio, per $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$, è una norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Proprietà

Considerata una norma $\|\cdot\|$ e due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$$

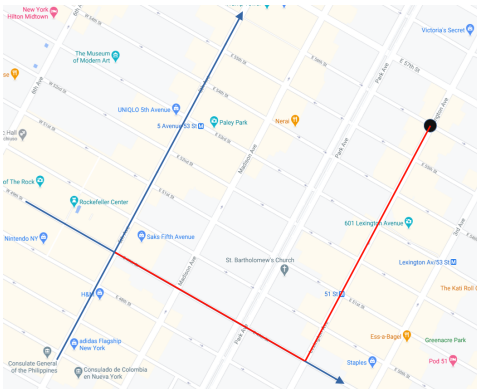
Altre norme

La norma euclidea (o **norma 2** oppure norma ℓ_2) non è l'unica norma che si può definire in \mathbb{R}^n ne esistono molte altre

Le più comuni

- norma 1 o ℓ_1 anche nota come norma Manhattan o Taxicab

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$



Altre norme

La norma euclidea (o **norma 2** oppure norma ℓ_2) non è l'unica norma che si può definire in \mathbb{R}^n ne esistono molte altre

Le più comuni

- norma 1 o ℓ_1 anche nota come norma Manhattan o Taxicab

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

- norma ∞ o ℓ_∞ anche nota come norma di Chebyshev

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

- norma euclidea

- norma 3 o ℓ_3

$$\|x\|_3 = \sqrt[3]{|x_1|^3 + |x_2|^3 + \dots + |x_n|^3}$$

- ...

- norma p o ℓ_p

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$$

Inorni, punti interni, esterni, di frontiera

Definizione

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ($\epsilon > 0$), si dice **intorno sferico aperto** di centro x e raggio ϵ l'insieme

$$B_\epsilon(x) = B(x; \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \epsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \epsilon\}$$

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e un punto $x \in \mathbb{R}^n$:

1 esiste $\epsilon > 0$:

$$B_\epsilon(x) \subseteq E \implies \text{punto interno di } E$$

2 esiste $\epsilon > 0$:

$$B_\epsilon(x) \subseteq \text{co}(E) \implies \text{punto esterno ad } E$$

3 per ogni $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} B_\epsilon(x) \cap E \neq \emptyset \\ B_\epsilon(x) \cap \text{co}(E) \neq \emptyset \end{aligned} \implies \text{punto di frontiera per } E \text{ e } \text{co}(E)$$

Interno, frontiera e chiusura di un insieme

Definizione (Interno di E)

Si dice **interno** di E l'insieme dei punti interni di E

$$\overset{\circ}{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ è interno ad } E\}$$

Definizione (Frontiera di E)

Si dice **frontiera** di E l'insieme dei punti di frontiera per E

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ è di frontiera per } E\}$$

Quindi, per definizione, $\partial E = \partial \text{Co}(E)$

Definizione (Chiusura di E)

Si dice **chiusura** di E l'insieme $\bar{E} = E \cup \partial E$

Insieme limitato

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$

Definizione

*E si dice **limitato** se esiste un numero $r > 0$ tale che*

$$E \subseteq B_r(\mathbf{0})$$

Ovvero, E è limitato se esiste $r > 0$ tale che $\|x\| < r$ per ogni $x \in E$

Il Teorema di Bolzano-Weierstrass

Teorema

Se E è un sottoinsieme **limitato** ed **infinito** di \mathbb{R}^n , allora esiste almeno un punto di accumulazione x per E in \mathbb{R}^n

Aperti, interno, frontiera

$x \in \mathbb{R}^n$ interno	$x \in \mathbb{R}^n$ esterno	$x \in \mathbb{R}^n$ di frontiera
$\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subseteq E$	$\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subseteq co(E)$	$\forall \epsilon > 0 : \begin{matrix} B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset \\ B(x, \epsilon) \cap co(E) \neq \emptyset \end{matrix}$

$x \in \mathbb{R}^n$ di acc. per E	$x \in E$ isolato di E
$\forall \epsilon > 0 : (B(x, \epsilon) \cap E) \setminus \{x\} \neq \emptyset$	$\exists \epsilon > 0 : (B(x, \epsilon) \cap E) \setminus \{x\} = \emptyset$

E **aperto** (per definizione) quando $\forall x \in E, x$ interno di E

E **chiuso** (per definizione) quando $co(E)$ è aperto

E chiuso $\Leftrightarrow \partial E \subseteq E \Leftrightarrow E$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione

E ne chiuso ne aperto $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists x \in \partial E \cap E \text{ almeno un punto non è interno} \\ \exists x \in \partial E \setminus E \text{ almeno un punto di } \partial E \text{ non è in } E \end{cases}$

Proprietà topologiche dei punti di \mathbb{R}^n

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$

- 1 $x \in \mathbb{R}^n$ è **interno** ad E quando $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subseteq E$
 - **interno** di E , $int(E) = \overset{\circ}{E}$, insieme di tutti i punti interni di E
 - E è **aperto** quando $E = \overset{\circ}{E}$
 - E è **chiuso** quando $co(E)$ è aperto
- 2 $x \in \mathbb{R}^n$ è **esterno** ad E quando $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subseteq co(E)$
- 3 $x \in \mathbb{R}^n$ che non è interno ne esterno è di **frontiera** per E
 - cioè quando $\forall \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$ e $B(x, \epsilon) \cap co(E) \neq \emptyset$
 - **frontiera** di E , ∂E , insieme di tutti i punti di frontiera per E
 - dalla def. segue che $\partial E = \partial co(E)$

NB dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ o x è interno ad E o x è esterno ad E oppure x è di frontiera per E cioè una ed una sola delle seguenti è verificata

- 1 $x \in \overset{\circ}{E}$ oppure
- 2 $x \in int(co(E))$ oppure
- 3 $x \in \partial E$

quindi $\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{E} \cup int(co(E)) \cup \partial E$

Proprietà di aperti e chiusi

- 1 \mathbb{R}^n e \emptyset sono sia aperti che chiusi e sono gli unici insiemi che hanno questa proprietà
- 2 l'unione di un numero finito o infinito di insiemi aperti è sempre un aperto
- 3 l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto
- 4 l'intersezione di un numero infinito di aperti può non essere un aperto
- 5 l'intersezione di un numero finito o infinito di insiemi chiusi è sempre un chiuso
- 6 l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso
- 7 l'unione di un numero infinito di chiusi può non essere un chiuso

Limiti in \mathbb{R}

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di acc. per D . Quando si dice che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$$

Definizione

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di acc. per D .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$$

quando **per ogni intorno** $\mathcal{U}(\ell)$ **esiste un intorno** $\mathcal{N}(x_0)$ tale che

$$x \in (\mathcal{N}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\ell)$$

Limiti in \mathbb{R}^n

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}_*^n$ punto di accumulazione per E , $\ell \in \mathbb{R}^*$

Definizione (Limite)

Diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

quando **per ogni intorno $\mathcal{U}(\ell)$ esiste un intorno $\mathcal{N}(x_0)$ tale che**

$$x \in (\mathcal{N}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\ell)$$

Limiti di funzioni vettoriali

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ovvero

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}_*^n$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$ o $x_0 = \infty$) di accumulazione per D

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_*^m \quad (\ell \in \mathbb{R}^m \text{ o } \ell = \infty)$$

quando (per definizione) **per ogni** intorno $\mathcal{U}(\ell)$ **esiste un** intorno $\mathcal{N}(x_0)$ tale che

$$x \in (\mathcal{N}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\ell)$$

cioè

$$\text{se } x \in (\mathcal{N}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\} \text{ allora } f(x) \in \mathcal{U}(\ell)$$

Limiti per $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – proprietà

Proposizione

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}_*^n$ di acc. per D e $\ell \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \ell_2 \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) = \ell_m \end{cases}$$

Proprietà dei limiti

Definizione

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}_*^n$ di acc. per D . Diciamo che f ha una certa proprietà \mathcal{P} **definitivamente** per x tendente a x_0 quando:
 esiste un intorno $\mathcal{U}(x_0)$ tale che f ha la proprietà \mathcal{P} per ogni punto $x \in (\mathcal{U}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\}$

- 1 **unicità del limite** se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_2$ allora $\ell_1 = \ell_2$
- 2 **permanenza del segno** se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Operazioni sui limiti

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 di acc. per $A \cap B$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$

- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c\ell_1, \forall c \in \mathbb{R}$
- 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \ell_1 + \ell_2$
- 5 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$
- 6 $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/g(x) = 1/\ell_2$ se $\ell_2 \neq 0$
- 7 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \ell_1/\ell_2$ se $\ell_2 \neq 0$

- 8 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata inferiormente per $x \rightarrow x_0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty$
- 9 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x) > \ell > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty$
- 10 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$
- 11 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/f(x) = +\infty$
- 12 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/f(x) = 0^+$

Successioni in \mathbb{R}

Definizione

Una successione di numeri o in \mathbb{R} è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (o $f: \{k \in \mathbb{N} : k \geq \bar{k}\} \rightarrow \mathbb{R}$) che associa ad ogni intero non negativo $k \in \mathbb{N}$ un numero

$$f(k) = x(k) = x_k \in \mathbb{R}$$

Un successione in \mathbb{R} si indica $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{x_k\}_{\mathbb{N}}$ oppure $\{x_k\}$

Esempio

$\{1/k\}$, $\{k^2/(k+1)\}$

Successioni in \mathbb{R}^n

Definizione

Una successione di **vettori** \mathbf{o} in \mathbb{R}^n è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (o $f: \{k \in \mathbb{N} : k \geq \bar{k}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$) che associa ad ogni intero non negativo $k \in \mathbb{N}$ un vettore

$$f(k) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$$

Un successione in \mathbb{R}^n si indica $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\mathbf{x}_k\}_{\mathbb{N}}$ oppure $\{\mathbf{x}_k\}$

Esempio

$$\left\{ \begin{pmatrix} k \\ k+3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 + \sin k \end{pmatrix} \right\}$$

Successioni in \mathbb{R}^n

- 1 $\{x_k\}$ è **convergente** se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$$

- 2 $\{x_k\}$ è **divergente** se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty \in \mathbb{R}_*^n$$

- 3 $\{x_k\}$ è **irregolare** se non è né convergente né divergente

- 4 Una successione in \mathbb{R}^n $\{x_k\}$ è **limitata** se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|x_k\| \leq M, \quad \forall k$$

Proposizione

Una successione $\{x_k\}$ è limitata se e solo se sono limitate le successioni definite dalle singole componenti

Sottosuccessioni in \mathbb{R}^n

Sia $\{x_k\}$ una successione. La successione che si ottiene da $\{x_k\}$ selezionando gli elementi x_k corrispondenti ad un insieme infinito di indici K è una sottosuccessione

Esempio

Sia $\{x_k\}$ definita come

$$x_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ (-1)^k \end{pmatrix}$$

La successione che si ottiene selezionando gli elementi corrispondenti a valori pari dell'indice k è una sottosuccessione

Sottosuccessioni in \mathbb{R}^n

Formalmente

Definizione

Data una successione $\{x_k\}$ e data una sequenza di interi crescenti $i_k \in \mathbb{N}$, la successione $\{y_k\}$ definita come

$$y_k = x_{i_k}$$

è una sottosuccessione di $\{x_k\}$

L'insieme $K = \{i_k, k \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme infinito di \mathbb{N} . Una sottosuccessione si indica molto spesso come

$$\begin{aligned} &\{x_k, k \in K \subseteq \mathbb{N}\} \\ &\{x_k\}_{k \in K} \\ &\{x_k\}_K \end{aligned}$$

Successioni in \mathbb{R}^n

- 1 $\{x_k\}$ è **convergente** se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$$

- 2 $\{x_k\}$ è **divergente** se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty \in \mathbb{R}_*^n$$

- 3 $\{x_k\}$ è **irregolare** se non è né convergente né divergente

- 4 Una successione in \mathbb{R}^n $\{x_k\}$ è **limitata** se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|x_k\| \leq M, \quad \forall k$$

- 5 $\{x_k\}$ è **illimitata** se esiste un insieme di indici $K \subseteq \mathbb{N}$ tale che la sottosuccessione $\{x_k\}_{k \in K}$ è divergente.

Successioni ricorsive

Esempio in \mathbb{R} Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vogliamo determinare un punto x^* tale che $f(x^*) = 0$

Supponiamo

- 1 che f sia derivabile in \mathbb{R} ;
- 2 di disporre di x_0 tale che $f(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) \neq 0$

eq. retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

troviamo il punto in cui la retta taglia l'asse delle ascisse

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Successioni ricorsive

In generale possiamo definire una successione ricorsiva come segue. Dati m vettori $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, m-1$, ed una funzione

$f: \underbrace{\mathbb{R}}_{\rightarrow k} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiamo

$$x_k = \begin{cases} a_k, & \text{se } k < m, \\ f(k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}), & \text{se } k \geq m. \end{cases}$$

I primi elementi della successione sono:

$$a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \underbrace{x_m}, \underbrace{x_{m+1}}, \dots$$

$$f(m, a_{m-1}, \dots, a_0) \quad f(m+1, x_m, a_{m-1}, \dots, a_1)$$

Classificazione delle successioni

- 1 $\{x_k\}$ **convergente** quando (per def.) esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$
- 2 $\{x_k\}$ **divergente** quando (per def.) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$ i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = +\infty$
- 3 $\{x_k\}$ **irregolare** quando (per def.) non è ne convergente ne divergente
- 4 $\{x_k\}$ **limitata** quando (per def.) esiste $M > 0$: $\|x_k\| < M$ per ogni k
- 5 $\{x_k\}$ **illimitata** quando (per def.) esiste $K \subseteq \mathbb{N}$: $\{x_k\}_K$ è divergente

Proprietà delle successioni

- 1 $\{x_k\}$ **convergente** $\Rightarrow \{x_k\}$ **limitata**
- 2 $\{x_k\}$ **limitata** \Rightarrow esiste $K: \{x_k\}_K$ **convergente**
- 3 $\{x_k\}$ **convergente** \Leftrightarrow per ogni $K, \{x_k\}_K$ **convergente**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} x_k = \bar{x}, \quad \forall K \subseteq \mathbb{N}$$

- 4 $\{x_k\} \subseteq C, C$ **compatto** \Rightarrow esiste $K: \{x_k\}_K$ **convergente**
- 5 (T. ponte) $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ di acc. per X

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \ell$$

per ogni $\{x_k\} \subseteq X \setminus \{x_0\}: \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$

Definizione

Definizione

Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. f è continua in $x_0 \in E$ quando

- x_0 è **punto isolato** di E oppure
- x_0 è **punto di accumulazione** per E e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

cioè

- 1 il limite esiste
- 2 il limite vale $f(x_0)$

Definizione

f è continua in $X \subseteq E$ quando è continua in ogni punto di X

Che cosa significa?

Poter dire che una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in D$ di accumulazione per D vuol dire che

*f assume valori **arbitrariamente** vicini al valore $f(x_0)$ (cioè vicini quanto si vuole) per punti x che sono **sufficientemente** vicini ad x_0*

Operazioni che preservano la continuità

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^n$, $g: Y \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in X \cap Y$. Allora sono continue in x_0 anche

- 1 la funzione $f \pm g$
- 2 la funzione αf , $\alpha \in \mathbb{R}$
- 3 la funzione $f \cdot g$
- 4 la funzione f/g se $g(x_0) \neq 0$
- 5 la funzione $|f|$

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in X$ e $g: Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $y = f(x_0) \in Y$. Allora

- 6 la funzione composta $f(g(x))$ è continua in x_0

Funzione lineare

Definizione

Una $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **lineare** quando

- ① per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- ② per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare \Leftrightarrow esistono $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = c^T x$$

Definizione

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **affine** quando esiste $c \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = c^T x + d$$

Forme quadratiche

- Una forma quadratica di una variabile è un polinomio omogeneo di secondo grado $q(x) = ax^2$
- Una forma quadratica di due variabili è un polinomio omogeneo di secondo grado in due variabili $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= (ax + by)x + (0x + cy)y = (ax + by, 0x + cy) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= (x, y) \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= (x, y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Funzioni quadratiche

Definizione

Una funzione quadratica è (per def.) la somma di una forma quadratica e una funzione affine

$$q(x) = \underbrace{x^T Q x}_{\text{forma quadratica}} + \underbrace{c^T x + d}_{\text{funzione affine}}$$

con Q non tutta nulla

N.B. si può sempre presumere che Q sia una matrice simmetrica. Se così non fosse, possiamo sostituire Q con $(Q + Q^T)/2$ dato che risulta

$$x^T Q x = x^T \left(\frac{1}{2}(Q + Q^T) \right) x$$

ATTENZIONE in generale $Q \neq (Q + Q^T)/2$

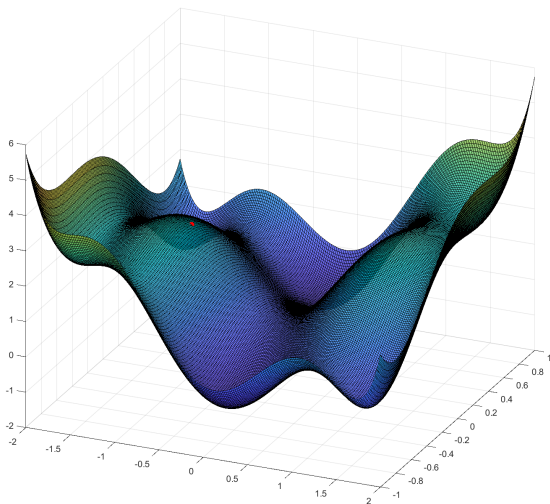
Restrizioni di f

Data la funzione

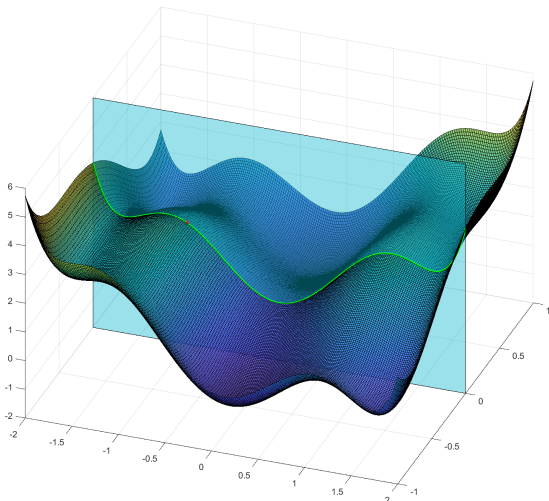
$$f(x, y) = (4 - 2.1x^2 + \frac{1}{3}x^4)x^2 + xy + (-4 + 4y^2)y^2$$

- Stabilire se e perchè è continua su \mathbb{R}^2
- scrivere l'espressione della restrizione di f all'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$
- scrivere l'espressione della restrizione di f all'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}$
- scrivere l'espressione della restrizione di f all'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1 + 2t, y = t\}$

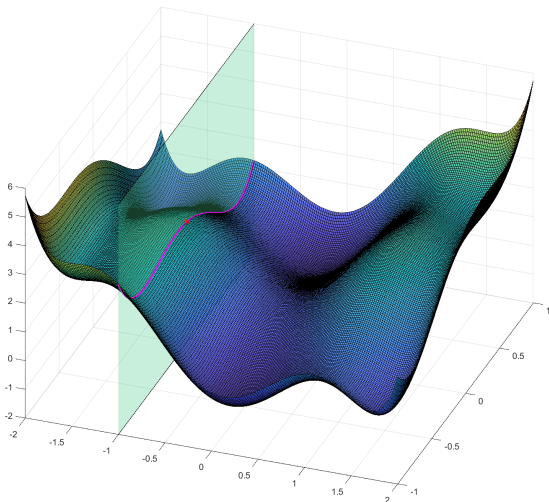
Grafico di f



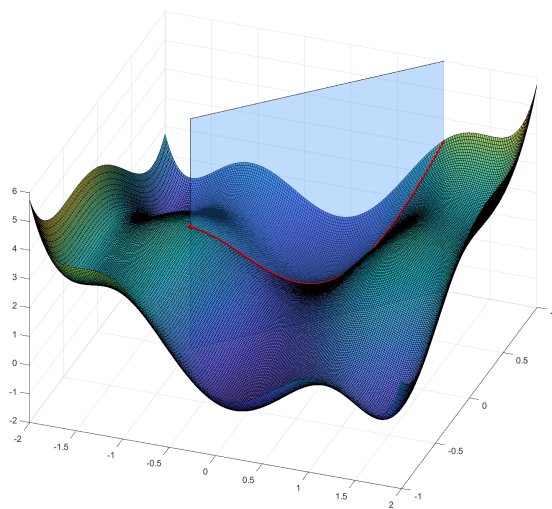
Restrizione di f a $y = 0$



Restrizione di f a $x = -1$



Restrizione di f a $x = -1 + 2t, y = t$



Funzione derivabile e derivata

Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Definizione

f è derivabile in x_0 se esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

il valore del limite (se esiste finito) si chiama derivata di f in x_0 , $f'(x_0)$

Funzione differenziabile

Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$

Definition

f è differenziabile in x_0 quando esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che, per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

N.B. possiamo approssimare f con la funzione lineare $f(x_0) + a(x - x_0)$ con precisione arbitraria a patto che il punto x sia sufficientemente vicino ad x_0

Equivalenza in \mathbb{R}

Teorema

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. f è derivabile in x_0 se e solo se f è differenziabile in x_0

Funzione differenziabile

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile (derivabile) in x_0 .

Il grafico della funzione lineare $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è l'insieme

$$G_t = \{(x, y) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\}$$

ed è detto **retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Il vettore $(-f'(x_0), 1)$ è il **vettore normale alla tangente** (ed al grafico di f) in x_0

Che cosa significa?

Supponiamo di avere una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile (o differenziabile) in un punto x_0 . Cosa sappiamo di f ?

- 1 f è continua in x_0
- 2 f è approssimabile “vicino” ad x_0 con una funzione lineare
- 3 esiste la tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ cioè il grafico è “liscio” in x_0
 - certamente non presenta salti (perchè f è continua)
 - non presenta “spigoli” dove la tangente non sarebbe definita

Esempio

In \mathbb{R}^2 consideriamo la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

e

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = x(t) = P_1 + td_1, t \geq 0\}$

- $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = x(t) = P_2 + td_2, t \geq 0\}$

$$f|_A(x) = \phi_1(t), \quad f|_B(x) = \phi_2(t)$$

Calcolate:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi_1(t) - \phi_1(0)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi_2(t) - \phi_2(0)}{t}$$

Derivata direzionale

Complimenti avete calcolato la vostra prima derivata direzionale di una funzione di due variabili !!!

Definizione

Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che f ammette **derivata direzionale** in $x \in \mathbb{R}^n$ lungo $d \in \mathbb{R}^n$ quando esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = Df(x, d)$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_3 + x_2x_3^2$$

Dato $x \in \mathbb{R}^3$ consideriamo l'insieme

$$A = \{(y_1, y_2, y_3) : y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + h\}$$

Calcolate

$$f|_A(x) = \phi(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h}$$

Derivata parziale

Definizione

Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che f ammette **derivata parziale** in $x \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla variabile x_i quando esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x)}{h} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Vettore $\nabla f(x)$

Definizione

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. f è **derivabile** in x quando essa ammette derivate parziali rispetto a tutte le variabili.

Se f è derivabile in x , il vettore colonna delle derivate parziali si indica con il simbolo $\nabla f(x)$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Connessione derivata direzionale – derivata parziale

Notiamo che, dato $x \in \mathbb{R}^n$ e $e_i \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$x + he_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i + h \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

quindi, dato che $f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) = f(x + he_i)$, se esiste $\partial f(x)/\partial x_i$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = Df(x, e_i)$$

Esempio 1

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

- 1 f è **derivabile** in $(0, 0)$, però
- 2 f **NON** è continua in $(0, 0)$, **NON** esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

- 3 f **NON** è approssimabile da una funzione lineare “vicino” all'origine

Mettiamo in campo l'artiglieria pesante

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

f ammette derivate direzionali in $(0, 0)$? **NO**

Provate a scegliere una $d \neq \pm e_i$ e calcolare

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + td) - f(0)}{t}$$

Esempio 2

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia $d \in \mathbb{R}^2$, $d_2 > 0$, $d_1 \neq 0$. Consideriamo la semiretta

$$r^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = td_1, y = td_2, t \geq 0\}$$

$$r^+ \cap G_{2 \times 2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = td_1, y = td_2, td_2 = 2t^2 d_1^2\} = \left\{ (0, 0), \left(\frac{d_2}{2d_1}, \frac{d_2^2}{2d_1^2} \right) \right\}$$

$td_2 > 2t^2 d_1^2$ per $t > 0$, quando $t \in (0, d_2/2d_1^2)$. Quindi, se consideriamo l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = td_1, y = td_2, t \in (0, d_2/2d_1^2)\}$

$$f|_A = 0$$

Allora $Df(0, d) = 0$.

Piano tangente

Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **differenziabile** in x_0

Definizione

Esiste il **piano tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ed è

$$T(x_0) = \{(x, y) : y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top (x - x_0)\}$$

Il vettore $v = (-\nabla f(x_0)^\top, 1)^\top$ è il **vettore normale** al piano tangente ed al grafico di f

Funzione continua, derivabile ma non differenziabile

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrare che f NON è differenziabile in $(0, 0)^\top$

Come stabilire se f differenziabile in x_0

Possibile che per stabilire se una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0 dobbiamo ricorrere alla definizione?

La risposta è **NO**, non sempre

Abbiamo due strumenti

- 1 operazioni che **preservano** la differenziabilità
- 2 il teorema del **differenziale totale**

Somma e prodotto di funzioni

Siano $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabili in x_0

① $h(x) = f(x) + g(x)$ è differenziabile in x_0 e risulta

$$\nabla h(x_0) = \nabla f(x_0) + \nabla g(x_0)$$

② $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ è differenziabile in x_0 e risulta

$$\nabla h(x_0) = g(x_0)\nabla f(x_0) + f(x_0)\nabla g(x_0)$$

Funzione composta

Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. g differenziabile in x_0 e f derivabile in $g(x_0)$

3 $h(x) = f(g(x))$ è differenziabile in x_0 e risulta

$$\nabla h(x_0) = f'(g(x_0)) \nabla g(x_0)$$

Funzione reciproca e rapporto

Siano $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabili in x_0 e t.c. $g(x_0) \neq 0$

④ $h(x) = 1/g(x)$ è differenziabile in x_0 e risulta

$$\nabla h(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2} \nabla g(x_0)$$

⑤ $h(x) = f(x)/g(x)$ è differenziabile in x_0 e risulta

$$\nabla h(x_0) = \frac{g(x_0)\nabla f(x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Ricordiamo

Per funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- 1 se f è derivabile: $\nabla f(x)$ vettore delle derivate parziali
- 2 se f è differenziabile: gradiente $g(x)$ tale che si ha

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \frac{|f(x+d) - f(x) - g(x)^\top d|}{\|d\|} = 0$$

Differenziabilità di un vettore di funzioni

Definizione (Derivata prima di un vettore di funzioni)

Sia $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si dice che g è differenziabile nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste una matrice $J(x)$ tale che, per ogni d si abbia

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x+d) - g(x) - J(x)d\|}{\|d\|} = 0.$$

L'operatore lineare $J(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice derivata di g in x .

N.B. la sola esistenza della matrice Jacobiana in x non implica la differenziabilità

Differenziabilità di un vettore di funzioni

Vale (analogamente al caso $m = 1$) la seguente

Proposizione

Sia $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

- (i) se g è differenziabile in x , allora g è continua in x , esiste la matrice Jacobiana $J(x)$ e $J(x)$ coincide con la derivata di g in x
- (ii) se esiste la matrice Jacobiana $J(x)$ di g in x e J è continua rispetto a x , allora g è differenziabile in x , e la derivata di g in x coincide con $J(x)$.

Derivazione di funzione composta

Sia

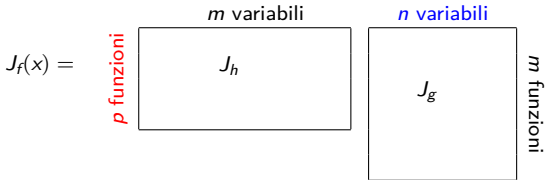
- $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in x
- $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenziabile in $g(x)$

Allora $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ definita da $f(x) = h(g(x))$ è differenziabile in x e si ha

$$\nabla f(x) = \nabla g(x) \nabla h(y)|_{y=g(x)}$$

N.B. ricordando che $\nabla f(x) = J_f(x)^\top$, abbiamo

$$J_f(x) = J_h(y)|_{y=g(x)} J_g(x)$$



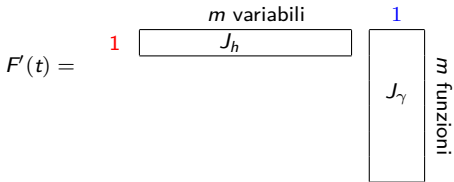
Caso particolare: $n = 1, p = 1$

Sia

- $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ derivabile (differenziabile) in $t_0 \in (a, b)$
- $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\gamma(t_0) \in \mathbb{R}^m$

Allora $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(t) = h(\gamma(t))$ è differenziabile in t_0 e si ha

$$F'(t) = \nabla \gamma(t) \nabla h(y)|_{y=\gamma(t)} = J_h(\gamma(t)) J_\gamma(t)$$



Critério di differenziabilità

Condizione sufficiente affinché $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sia differenziabile in x è che

- sia **derivabile** in x
- $\nabla f(x)$ sia **continuo** in x

1 una funzione f **continua** in ogni $x \in X$ si dice di **classe 0** su X , $f \in C^0(X)$

2 una funzione f che soddisfa la **C.S. di differenziabilità** in ogni $x \in X$ si dice di **classe 1** su X , $f \in C^1(X)$